# REHACIENDO EL CAMINO HACIA LA COMPRENSIÓN DE VARIABLE ALEATORIA

*Luisa Andrade, Felipe Fernández*
Universidad Pedagógica Nacional. Colombia
landrade@pedagogica.edu.co, fjfernandez@pedagogica.edu.co
Nivel Universitario

**Palabras clave**: Probabilidad. Experimento aleatorio. Espacio muestral. Variable aleatoria.



**Resumen**
El desarrollo de razonamiento estadístico alrededor del trabajo con la variable aleatoria se ve limitado por dificultades de los estudiantes que conciernen a conceptos básicos de la probabilidad, tales como experimento aleatorio y espacio muestral. La indagación de tales dificultades pone de relieve la problemática de la enseñanza al respecto y la naturaleza compleja de la concepción de variable aleatoria. Además sugiere ideas para un aprendizaje interconectado y con sentido de los conceptos mencionados, y para establecer conexiones más explícitas entre el trabajo en estadística y el de probabilidad.

## Introducción

En torno a la variable aleatoria se reportan problemas relativos a su comprensión y se reconoce que la enseñanza y el aprendizaje se dirigen principalmente al manejo diestro de procedimientos para determinar probabilidades, mediante distribuciones específicas como la binomial y la normal, y no tanto a la comprensión de los antecedentes que subyacen a la constitución del modelo probabilístico que la caracteriza. En parte esto se explica por la doble naturaleza del concepto de variable aleatoria, que comúnmente se ha visto y trabajado como una magnitud, es decir, como un conjunto de valores numéricos diferentes que corresponden a resultados de una medición; este enfoque se ha transformado dentro de la estadística, y ha pasado a establecerse como una relación funcional, entre dos conjuntos que se distinguen explícitamente: el espacio muestral y los valores que se asocian a eventos particulares de este espacio, los cuales constituyen las imágenes o el recorrido de la variable aleatoria. Subyacente a esta distinción esta la idea de identificar la partición del espacio muestral que es inducida por tales valores, para explicar el origen de las probabilidades que se calculan en una situación dada.

En un proyecto de investigación, que desarrolló la Línea de investigación en Educación Estadística de la Universidad Pedagógica Nacional en Bogotá, Colombia, y fue financiado por el Centro de Investigaciones (CIUP) y el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, se plantean experimentos de enseñanza en torno a la comprensión de la variable aleatoria con el fin de asumir la nueva conceptualización, atendiendo a las dificultades iniciales que se detectan en los estudiantes. Las tareas propuestas en los experimentos de enseñanza describen situaciones relativas a fenómenos aleatorios que dan lugar al tratamiento de espacios muestrales finitos y que persiguen objetivos de aprendizaje concernientes a diferentes aspectos de la comprensión del concepto de variable aleatoria (ver Fernández, Andrade y Montañez, 2011).

**Errores y dificultades de los estudiantes**

En una situación planteada acerca de una rifa en la que se escoge un empleado como ganador de un viaje con su familia a un posible destino a elegir, algunos estudiantes manifiestan dificultades al determinar el experimento aleatorio como uno de los sucesos de la situación, relacionado con los datos relevantes para responder la pregunta acerca de su identificación. Por ejemplo, algunos estudiantes señalan que el experimento aleatorio consiste en: “determinar cuáles son las posibilidades de escoger al empleado, la cantidad de familiares y la ciudad que desea conocer” o “determinar cuántos tiquetes de viaje y gastos de hotel a un destino hay que comprar antes de la rifa”, es decir, las respuestas están dadas en términos de la información del enunciado que consideran importante para responder la pregunta. Pareciera que el origen de estas dificultades es el hecho de que la situación propuesta no sea habitual en la enseñanza ya que una rifa no se establece usualmente como un fenómeno aleatorio que es plausible de trabajar matemáticamente. Quizás también por la definición de experimento aleatorio que pueden haber formado los estudiantes originada en los ejercicios y tareas de los libros de texto, que regularmente está constituida por un enunciado corto donde se describe la acción que genera los resultados aleatorios y por la observación que enfoca la atención, en contraste con la situación de la rifa que es rica en información y donde la observación se especifica de manera indirecta.

Los estudiantes tienen problemas para establecer los espacios muestrales asociados a experimentos aleatorios, incluso tras identificar éstos adecuadamente. A pesar de que la realización de la rifa es reconocida por algunos como el experimento aleatorio, el espacio muestral que luego registran es: “un ganador y el resto perdedores” o “$S = \{G_1, P_1, P_2,..., P_{119}\}$”. En estas respuestas se percibe cómo de alguna manera intentan encajar el espacio muestral dentro de las características de los espacios muestrales que han trabajado con mayor énfasis, en particular, situaciones cuyos valores se comportan de manera binomial; aunque el espacio muestral no está constituido por dos puntos muestrales, la confusión puede explicarse por el manejo cotidiano de una rifa, en la cual hay evidentemente solo dos posibles resultados para un participante: ganar o perder. Otro ejemplo de respuesta que muestra esta tendencia se ve claramente en la siguiente situación: “Se selecciona al azar~~,~~ un computador de la sala B-224 (que tiene 25 computadores) para verificar el funcionamiento de su sistema operacional”, donde los estudiantes reconocen el experimento aleatorio al señalar que “el experimento aleatorio es seleccionar al azar uno de los 25 computadores de la sala B-224”, pero afirman que el espacio muestral es “S={funciona el sistema operacional (F), No funciona el sistema operacional (NF)}”. Hay una marcada inclinación a confundir la observación mediada por el propósito del experimento (observar el funcionamiento) con la observación de la acción aleatoria misma, y a proponer espacios muestrales en términos de dos resultados como ‘si’ y ‘no’, ‘falso’ y ‘verdadero’, ‘0’ y ‘1’.

Varios de los estudiantes aún después de puntualizar los posibles resultados del experimento aleatorio, no reconocen el espacio muestral como el conjunto conformado por ellos. Pareciera que a pesar de conocer la definición de espacio muestral, en las tareas que se abordan usualmente en la enseñanza que corresponden a juegos de azar y fabricaciones de artículos defectuosos, el espacio muestral se piensa ligado a la observación solicitada, es decir, en términos de la característica que interesa observar, más que a los resultados mismos del experimento aleatorio. Así, reflejan en el espacio muestral consideraciones del enunciado que muchas veces coinciden con los valores tomados por las variables, ya sean variables aleatorias o no, o combinaciones de esos valores. En esto también puede incidir el hecho de que el enunciado que describe la situación involucra información adicional al fenómeno aleatorio mismo, que hace que consideren la necesidad de incluir en el espacio muestral tal información. Por ejemplo en la situación de la rifa, algunos estudiantes señalan como posibles resultados de ésta, cualquiera de los 120 empleados, pero al estipular el espacio muestral hablan de “Se motiva, No se motiva” (debido a que en el enunciado de la situación de la rifa se indica que ésta se lleva a cabo para motivar a los empleados de una empresa, es probable que algunos de los estudiantes tomen esta información como relevante para establecer el espacio muestral), o “los posibles resultados son ganar o perder”, o “S = {(E), (E,M), (E,M,$H_1$), (E,M,$H_1$,$H_2$), (E,M,$H_1$,$H_2$,…,$H_n$)}” donde “E =Empleado, M=Esposa y H=Hijos”, o “S = {1L, 1R, 1P, 2L, 2R, 2P, 3L, 3R, 3P,…, 22L, 22R, 22P}”, donde el número hace referencia a la cantidad de familiares y la letra corresponde a la letra inicial de la ciudad de preferencia.



Otras dificultades que se detectan en los estudiantes a través de los errores al explicitar los puntos muestrales del espacio muestral, tocan aspectos relativos a la formación de los puntos muestrales, como determinar si se trata de una permutación o una combinación y valorar si la repetición o no-repetición de elementos es relevante. Por ejemplo, en la situación de la rifa para algunos estudiantes el espacio muestral está compuesto por arreglos de 120 elementos “S = {GPPP…P, PGPP…P, PPGP…P,…}”; esta respuesta parece estar directamente vinculada al número de resultados que calculan con una fórmula combinatoria, y está influenciada por el trabajo en combinatoria que se realiza en los cursos de probabilidad. Similarmente en la situación “De un listado de 8 estudiantes del primer semestre de matemáticas de 2012-1 se eligen al azar 2 estudiantes para ayudar en la organización de la semana del educador matemático”, los estudiantes reconocen el experimento aleatorio como “elegir dos estudiantes de una lista de ocho”, y sin embargo, el espacio muestral que consideran es el listado de los ocho estudiantes, y no las posibles parejas que podrían ser seleccionadas. De nuevo aquí es relevante el hecho de que la situación es ajena a los experimentos aleatorios regularmente presentados en los libros de texto para los que los estudiantes conocen la configuración de los espacios muestrales respectivos; así asocian la situación desconocida con una ya trabajada como la de establecer el número de ordenaciones con elementos repetidos. Tampoco ayuda el hecho de que en libros de texto (ver Wisniewski y Bali, 1998, p. 50) se presenten inconsistencias al denotar, por ejemplo, en forma de parejas ordenadas, configuraciones de elementos que corresponden a combinaciones donde el orden no es relevante.

La evidencia de estos errores y las posibles dificultades que los subyacen, llama la atención pues pese a ellas, los estudiantes son capaces de emplear diagramas y fórmulas combinatorias para contar, y de esta manera calcular exitosamente probabilidades. Esto fue claro en situaciones como “Se selecciona una bola de una urna, que contiene 3 bolas rojas, 4 verdes y 2 amarillas”, donde los estudiantes calculan sin problema la probabilidad de que la bola seleccionada sea verde como “4/9” por combinatoria, pero al preguntar por el espacio muestral lo establecen como “S= {rojo, verde, amarillo}” que corresponde al recorrido de la variable aleatoria, sin tener en cuenta el número de bolas de cada color y sin relacionar los conteos que hacen, con el número de puntos muestrales del espacio muestral.

**Discusión**

Al respecto de la noción de experimento aleatorio se evidencia que además de la acción misma que genera los resultados aleatorios, esta noción incluye una acción implícita de observación de tales resultados que puede explicitarse o no. Por ejemplo, lanzar una moneda implica observar algo -usualmente el resultado que sale, pero podría también ser la distancia al borde de la mesa-, ya que esta es la razón por la cual se realiza el experimento de lanzar la moneda. Adicionalmente en algunos experimentos aleatorios se agrega otra observación en la que también está presente el azar -pues toma un valor particular en cada ejecución del experimento-, que indica el foco específico de atención sobre los resultados; en el caso del experimento aleatorio de lanzar un dado se observa el número que está en la cara superior, y el enunciado se señala que se anota 1 si sale par o 0 si no, se observa también esto. Mediante esta última acción se organizan los resultados posibles y se da lugar a la variable aleatoria.

En torno a cómo se constituyen los elementos llamados puntos muestrales que hacen parte del conjunto denominado espacio muestral, es decir, cuáles son realmente los resultados posibles asociados a un experimento aleatorio, se nota que muchas veces los espacios muestrales finitos considerados en los libros de texto para las diferentes situaciones, corresponden a los conjuntos de valores que toman las posibles variables aleatorias o seudo aleatorias, es decir, las imágenes de la relación funcional. Es necesario señalar, que las que llamamos variables seudo aleatorias, tienen características similares a una variable aleatoria en el sentido de que dan lugar a una partición del espacio muestral, y por lo tanto, a una relación funcional entre el espacio muestral y un conjunto, pero dado que éste no es numérico no se consideran formalmente como variables aleatorias.

El hecho de que la definición formal para espacio muestral expuesta en libros de texto, que alude al conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio, sea flexible y permita en algunos casos considerar como puntos muestrales los valores que toman las variables aleatorias, es decir, como los elementos del espacio muestral, motiva a que con frecuencia se admita la coexistencia de varios espacios muestrales en una misma situación y para el mismo experimento aleatorio. Se encuentran entonces referencias a que el espacio muestral de un experimento aleatorio no es único y así un experimento aleatorio puede constar de varios espacios muestrales (ver Larson, 1995; Wisniewski y Bali, 1998; y Montgomery y Runger, 2004). Se explica así la tendencia de los estudiantes a involucrar los valores que toman las variables aleatorias en los espacios muestrales. Esta ‘flexibilidad’ puede reflejar un significado para experimento aleatorio que incluye la observación adicional que en algunos casos se añade, para precisar la mirada.

Se considera entonces conveniente hacer una distinción entre espacio muestral ‘original’ y espacio muestral ‘adoptado’. El primero es el conjunto que resulta de explicitar directamente todos los posibles resultados del experimento aleatorio. El segundo es la colección de todos los eventos simples o elementales que interesa identificar en la realización del experimento según la observación puesta en juego, que con frecuencia se adopta como espacio muestral, tal y como lo sugiere Larson (1995, p. 35) y como se evidencia en los libros de texto.

Algunos ejemplos de experimentos aleatorios sencillos relativos al lanzamiento de un dado, sirven para ilustrar la distinción planteada.

*Experimento aleatorio 1*. Se lanza un dado normal y se anota el número que resulta en la cara superior.

*Experimento aleatorio 2*. Se lanza un dado normal y se anota 'SI' si el número que resulta es divisible por 3, o se anota 'NO' si no es divisible por 3.

*Experimento aleatorio 3*. Se lanza un dado y se anota '1' si el número que resulta es divisible por 3 o se anota '0' si no es divisible por 3.



Claramente en el primer experimento aleatorio el espacio muestral es el conjunto $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, y no hay ambigüedad respecto al espacio muestral 'adoptado'; ambos espacios muestrales, el 'original' y el 'adoptado', son el mismo. Sin embargo, cuando se pide determinar el espacio muestral asociado al segundo o tercer experimento aleatorio, la respuesta que suele encontrarse en textos de probabilidad es $S_2 = \{SI, NO\}$ y $S_3 = \{1, 0\}$ respectivamente. Entonces en el segundo experimento aleatorio, $S_2$ es el espacio muestral 'adoptado' mientras que el espacio muestral 'original' es $S_1$; y en el caso del tercer experimento aleatorio, la situación es similar, con la diferencia de que el espacio muestral 'adoptado' $S_3$, es un conjunto numérico.

La falta de distinción que se presenta en los libros de texto, entre el espacio muestral y el recorrido de las variables aleatorias vistas como relaciones funcionales, es explicada por Ruiz (2006) para los experimentos aleatorios cuyos resultados son numéricos, quien señala que en esos casos "las variables aleatorias están ya implícitas en los puntos muestrales", es decir, los valores que toma una variable aleatoria hacen parte del espacio muestral, por ejemplo, si el experimento aleatorio consiste en observar el tiempo de espera a un autobús. En esta situación y como se vio en el ejemplo del primer experimento aleatorio expuesto antes, no hay confusión, ya que el espacio muestral y el conjunto de los valores que toma la variable aleatoria son el mismo. Empero, en los libros de texto es usual que, independientemente de si los resultados del experimento aleatorio son numéricos o no, el espacio muestral indicado sea en realidad el espacio muestral que se ha denominado 'adoptado'. Por ejemplo, al lanzar tres monedas el número de caras da lugar a una variable aleatoria, pero se encuentra que los valores que ésta toma se consideran como el espacio muestral $S = \{0, 1, 2, 3\}$, cuando en realidad el espacio muestral 'original' es $S = \{CCC, SSS, CCS, CSS, SCC, SSC, CSC, SCS\}$. Esto sucede igualmente en experimentos aleatorios en los cuales hay variables que no se consideran como variables aleatorias por no ser numéricas, es decir, en el caso de las que se han llamado aquí variables seudo aleatorias. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado de seis caras para determinar si el número que sale es par o impar, estos valores comúnmente se toman como el espacio muestral $S_4 = \{par, impar\}$, que en realidad es el espacio muestral 'adoptado' pues el espacio muestral 'original' es $S_5 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. En suma, es frecuente encontrar en los libros de texto, que la pregunta central de la situación que se quiere responder, sea el factor que determina el espacio muestral (ver Wisniewski y Bali, 1998, p. 41), y en consecuencia la identificación del espacio muestral dependa de aquélla. Algunos autores sustentan esta selección a conveniencia del espacio muestral, cuando argumentan que el espacio muestral apropiado “depende del problema que se tenga en mano” (Freund y Walpole, 1990, p. 29).

Siguiendo el análisis en esta dirección, es fácil percibir que en ocasiones el proceso de cálculo de las probabilidades ayuda a ocultar la importancia de distinguir entre espacio muestral, el que se ha llamado ‘original’, y el conjunto de valores que constituye el recorrido de una variable aleatoria como relación funcional, el denominado espacio muestral ‘adoptado’, pues la misma probabilidad puede obtenerse a partir de cualquiera de los dos conjuntos, y por lo tanto es suficiente aludir a uno, generalmente el espacio muestral ‘adoptado’, sin necesidad de indicar el otro. Un caso típico es el anterior ejemplo del lanzamiento de un dado para determinar si sale un número par o impar, donde partiendo de cualquiera de los dos espacios muestrales, ‘original’, $S_5$, o ‘adoptado’, $S_4$, la probabilidad de que el número que sale sea par o impar es $1/2$ pues hay tres caras con números pares y tres caras con números impares. Se encuentra así que la falta de referencia al espacio muestral ‘original’ de los libros de texto está relacionada con el tipo de situaciones que se abordan, en las cuales es común que la probabilidad de un evento se pueda calcular con base en el espacio muestral ‘adoptado’, bien sea por conteo o mediante el uso de una fórmula preestablecida y conocida. Esto implica que en las situaciones que se presentan con frecuencia en la práctica educativa y en los libros de texto, en donde es viable asumir la condición de equiprobabilidad para espacios muestrales ‘originales’ finitos, éstos no se consideran a la hora del cálculo de las probabilidades y por el contrario, se enfatiza la distinción entre las situaciones donde el espacio muestral’ es equiprobable y donde no lo es, claro aludiendo tácitamente unas veces al espacio muestral ‘original’ y otras al espacio muestral ‘adoptado’.



Se ve entonces la conveniencia de trabajar situaciones que motiven determinar el espacio muestral ‘original’ para el cálculo de probabilidades. Por ejemplo, el experimento aleatorio que ocurre al girar una ruleta de siete dígitos, del 1 a 7, donde el espacio muestral ‘original’ $S_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ es equiprobable, mientras que el espacio muestral ‘adoptado’ $S_7 = \{PAR, IMPAR\}$ no es equiprobable, dado que hay tres números pares y cuatro números impares. Aquí entonces calcular la probabilidad de que el número que sale sea impar, no puede hacerse a partir del espacio muestral ‘adoptado’, sino que es necesario recurrir al espacio muestral ‘original’. Situaciones relacionadas con experimentos que se asocian a la distribución binomial u otras, las cuales regularmente son tratadas en libros de texto solo desde el modelo probabilístico, también podrían abordarse desde el espacio muestral finito ‘original’ equiprobable para el cálculo de probabilidades, cuando el número de repeticiones del experimento no sea muy grande, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

*Experimento aleatorio 4*. Un estudiante contesta al azar *n* preguntas de un examen, y se anota la opción que elige como respuesta. Cada pregunta tiene *k* opciones de respuesta, pero solo una opción es la respuesta correcta.

Para empezar, suponga que n = 2 y k = 2. Esto significa que se trata de un examen de dos preguntas cada una de las cuales solo tiene dos opciones de respuesta A o B. Al considerar este experimento binomial, el hecho de n = 2 indica que el experimento se repite dos veces, y es claro entonces para los estudiantes que la variable aleatoria asociada tomaría los valores X = 0, 1, 2, la cual corresponde al número de aciertos del estudiante al contestar el examen de dos preguntas. Las probabilidades calculadas a través de las fórmulas del modelo binomial serían Pr(X=0) = $1/4$, Pr(X=1) = $1/2$ y Pr(X=2) = $1/4$. Es usual que también en la enseñanza, se aluda a un diagrama de árbol que ilustre los puntos muestrales o eventos simples que se originan en cada rama, y que permiten el cálculo de las probabilidades fundamentado en la probabilidad de éxito de la prueba de Bernoulli, en este caso $1/2$, igual a la probabilidad del fracaso; en el diagrama de árbol se muestra entonces el espacio muestral denominado 'adoptado', sin que sea expresado con notación de conjuntos.

Las preguntas relativas a este experimento se pueden trabajar con base en el espacio muestral 'adoptado' $S_A$ = {EE, EF, FE, FF} asociado a los posibles éxitos (E) y fracasos (F), el cual es equiprobable y así calcular las probabilidades Pr(X=0) = Pr({FF}) = $1/4$, Pr(X=1) = Pr({EF, FE}) = $1/4$ + $1/4$ = $1/2$ y Pr(X=2) = Pr({EE}) = $1/4$. También tales preguntas se podrían abordar a partir del espacio muestral 'original', construido a partir de la siguiente tabla:

| Pregunta | Opciones de respuesta | |
|---|---|---|
| 1 | A | B |
| 2 | A | B |

Todas las posibles respuestas del estudiante conforman el espacio muestral 'original' $S_B$ = {AA, AB, BA, BB} que también es equiprobable, de manera que si por ejemplo la respuesta correcta es el evento {BA}, entonces Pr({BA}) = $1/4$, y lo mismo vale para el resto de puntos muestrales; además, nótese que se puede establecer una correspondencia uno a uno entre cada elemento del espacio muestral original y un elemento del espacio muestral adoptado. Se concluye entonces que los dos espacios muestrales, el 'adoptado' y el 'original' S, son equivalentes y equiprobables.

Cuando n = 2 y k = 3, la variable aleatoria asociada toma los mismos valores, X = 0, 1, 2. Empero, dado que ahora hay tres posibles respuestas para cada pregunta, la probabilidad de éxito de la prueba de Bernoulli es entonces $1/3$ y la probabilidad del fracaso es $2/3$; al aplicar el modelo Binomial se obtienen las probabilidades Pr(X=0) = $4/9$, Pr(X=1) = $4/9$ y Pr(X=2) = $1/9$. Por otro lado, es fácil ver que el espacio muestral 'adoptado' sigue siendo el mismo que el del caso anterior $S_A$ = {EE, EF, FE, FF}; no obstante es posible notar que éste no es equiprobable, pues por ejemplo, Pr({EE}) = $1/3 * 1/3 = 1/9$ y Pr({EF}) = $1/3 * 2/3 = 2/9$. Para buscar el espacio muestral 'original' se puede argumentar de manera similar al caso anterior:

| Pregunta | Opciones de respuesta | | |
|---|---|---|---|
| 1 | A | B | C |
| 2 | A | B | C |

Entonces las posibles respuestas del estudiante, configuran el espacio muestral ‘original’ S = {AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC}, para el cual es razonable asumir el supuesto de equiprobabilidad y además ayuda a aclarar, sin necesidad de recurrir a cálculos basados en el modelo Binomial, las asignaciones de probabilidad; por ejemplo, si la respuesta correcta es BA, entonces Pr(X=0) = Pr({AB, AC, CB, CC}) = $^4/_9$, Pr (X=1) = Pr({AA, BB, CA, BC}) = $^4/_9$ y Pr(X=2) = Pr({AB}) = $^1/_9$. En contraposición, emplear el espacio muestral ‘adoptado’ puede llevar a asignaciones de probabilidad incorrectas, como por ejemplo calcular la probabilidad de dos aciertos como $^1/_4$.

**Conclusiones**

La discusión en torno al análisis de las dificultades que subyacen a los errores en que incurren los estudiantes, pone de relieve la necesidad de ampliar el repertorio de situaciones ligadas con la aleatoriedad que se pueden matematizar; se requiere entonces trabajar situaciones de experimentos aleatorios, no sólo relativos a juegos de azar y artículos defectuosos, sino que atiendan a otros fenómenos aleatorios de la vida cotidiana. Son indispensables también situaciones que sean ricas en información donde los estudiantes puedan reconocer el experimento aleatorio independientemente de otros sucesos que aparezcan en el enunciado, incluso cuando estos sucesos son relevantes para dar solución a las preguntas planteadas.

Algunas estrategias que en principio se pueden considerar para contribuir a la identificación del experimento aleatorio, consisten en distinguir la observación que es la razón del fenómeno aleatorio, de la observación que da lugar a la variable aleatoria; en dividir el enunciado de las situaciones en varios enunciados, y de esta manera aislar el experimento aleatorio de otra información.

Como se vio, aunque muchas veces los estudiantes son capaces de seleccionar la fórmula o modelo probabilístico pertinente a la situación, y pueden usarlo adecuadamente para obtener la probabilidad solicitada, no siempre comprenden por qué la fórmula es así o de dónde proviene, y trabajar las situaciones se convierte en un ejercicio de memorización y reemplazo de fórmulas. Abordar el cálculo de probabilidades a partir del espacio muestral que se ha denominado ‘original’, para situaciones donde el número de posibles resultados es finito y moderado, y donde los puntos muestrales se pueden establecer, facilita la asignación de probabilidades y contribuye a la comprensión de los estudiantes relativa al origen de dichas probabilidades.

Al determinar el espacio muestral ‘original’, los estudiantes pueden notar el papel del espacio muestral en dicho cálculo, por ser equiprobable y porque es posible comprobar, por un lado, si la probabilidad calculada es correcta y por otro lado, entender por qué esos son los números que intervienen en el cálculo.

El foco de la enseñanza en contestar preguntas de probabilidad cuyo cálculo se facilita empleando fórmulas que sintetizan los procesos, y el tratamiento del espacio muestral donde con frecuencia se evita la alusión y explicitación del espacio muestral ‘original’, explica la manera en que se trabaja la variable aleatoria con los estudiantes: no se enfatiza su significado como relación funcional -cuyo dominio es precisamente el espacio muestral, sino simplemente como el conjunto de valores que conforma el recorrido de la relación funcional. En los libros de texto cuando se alude a variables aleatorias con nombre propio como la binomial, la hipergeométrica, etc., se apunta básicamente a ese recorrido o dominio de la relación funcional que constituye la función de distribución de probabilidades. Tampoco ayuda a la enseñanza el nombre de 'variable aleatoria', pues tal y como lo señala Goldberg (1974), "Llamar variable aleatoria a una función de valores numéricos definida respecto a un espacio muestral es singularmente inadecuado […] las variable aleatorias, ni son variables… ni son aleatorias"; el autor en esta expresión parece interpretar la 'variable' desde una perspectiva clásica del álgebra, como una colección de distintos valores asociados a una medición.



Explicitar la distinción entre el espacio muestral 'original' y los espacios muestrales 'adoptados', puede nutrir el significado de la variable aleatoria. En situaciones donde el espacio muestral 'original' tiene un tamaño moderado, hacer esta diferencia ilustra la generación de agrupaciones que conforman particiones del espacio muestral determinadas por las variables aleatorias, y establece de manera natural la correspondencia entre los subconjuntos de la partición y los valores de la observación puesta en juego; estas ideas hacen parte inherente de la comprensión de la variable aleatoria desde su perspectiva funcional. Asimismo el trabajo con la seudo variable aleatoria en la enseñanza contribuye a consolidar el concepto de variable aleatoria dado que también involucra una partición del espacio muestral y una relación funcional entre el espacio muestral 'original' y un espacio muestral 'adoptado' no numérico.

Adicionalmente surgen pautas para contemplar posibles modificaciones en el currículo de la licenciatura en matemáticas con respecto al tratamiento, conexión y énfasis de temas particulares de estadística y probabilidad. En estadística por ejemplo, la ideas de 'población objetivo' y 'población de datos' se ven similares en probabilidad, a las nociones de espacio muestral 'original' y espacio muestral 'adoptado'.

Así pues, si la población objetivo configura el conjunto de unidades muestrales que determinan un marco de muestreo, una población de datos deviene de la medición de alguna característica y es consonante con la observación adoptada para determinar un valor que se asigna a cada unidad muestral, y que conforma la variable aleatoria o seudo aleatoria en una perspectiva funcional. Esta misma perspectiva la puntualiza Ortiz (2009), al señalar que una variable en estadística es "un instrumento operativo que asigna a cada individuo una etiqueta correspondiente al resultado de una apreciación", es decir, es una relación funcional cuyo dominio es la población y cuyo recorrido es el conjunto donde están definidas las etiquetas.

**Referencias Bibliográficas**

Fernández, F., Andrade, L. y Montañez, J. (2011). Hacia una posible aproximación comprensiva de la variable aleatoria. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica Universidade Federal de Pernambuco (Eds.). *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, pp.1-13. CIAEM-IACME, Recife: Brasil*

Freund, J.E. y Walpole, R. (1990). *Estadística Matemática con aplicaciones*. México, D.F.: Prentice–Hall Hispanoamericana, S.A.

Goldberg, S. (1974). *Cálculo de probabilidades*. Bilbao: Ediciones Urmo S.A.

Larson, H. (1995). *Introducción a la teoría de probabilidades e inferencia estadística*. México, D.F.: Limusa.

Montgomery, D. y Runger, G. (2004) *Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería*. México, D.F.: Limusa Wiley.

Ortiz, J. (2009). *Simulación y métodos estadísticos*. Bogotá: Universidad Santo Tomás.

Ruiz, B. (2006). *Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria*. Tesis de maestría no publicada, Instituto Politécnico Nacional. México.

Wisniewski, P. y Bali, G. (1998). *Ejercicios y problemas de Teoría de las probabilidades*. México, D.F.: Editorial Trillas.